

一种有效的分段光滑信号逼近方法

陈 伟

(江南大学数字媒体学院, 江苏无锡 214122)

摘 要: 传统的 Fourier 变换, 连续小波变换等方法在逼近具有分段光滑特性的非连续信号时, 因 Gibbs 现象的干扰会产生比较大的误差. 本文提出了一种有效的分段光滑信号逼近方法. 首先根据给定信号的分段点位置, 构造一组标准正交分段多项式系, 该函数系具有正交性, 收敛性及再生性. 然后将信号在该函数系下进行正交分解及重构, 即可得到该信号的最佳平方逼近结果. 数值实验表明, 本文方法比传统的正交基具有更好的逼近结果.

关键词: 分段光滑信号; 逼近; Gibbs 现象; 正交表达

中图分类号: TP302.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2016)08-2004-05

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2016.08.033

An Efficient Approximation Method for Piecewise Smooth Signal

CHEN Wei

(School of Digital Media, Jiangnan University, Wuxi, Jiangsu 214122, China)

Abstract: The truncating Fourier and continue wavelet representation of a discontinuous piecewise smooth signal will introduce an unneglectable error which was named as the Gibbs phenomenon. In this paper, we proposed an effective piecewise smooth signal approximation method. Firstly, a set of normal orthogonal piecewise polynomials was constructed according to the given positions of breaking points, and it has the properties of orthogonality, convergence and reproduction. Then the signal was orthogonal decomposed under this basis and the best square approximation result could be obtained using reconstruction. The numerical experiments show that our method have the higher accuracy approximation results than the other basis.

Key words: piecewise smooth signal; approximation; Gibbs phenomenon; orthogonal representation

1 引言

正交变换在信号的逼近, 压缩, 特征提取等领域具有广泛的应用, 它的数学基础便是正交函数系. 常见的正交函数系, 如 Fourier 变换中的三角基, 多项式空间中的 Legendre 基, Chebyshev 基以及多种小波函数等, 它们都是连续的甚至光滑的. 然而, 这些正交基并不适合表达分段光滑信号(即非连续信号), Gibbs 现象(Gibbs 现象: 用有限项 Fourier 级数表达间断信号时, 在间断点处会出现波动, 并且这种波动不能因求和的项数增大而彻底消失). 便是其障碍之一. 事实上, 只要是连续的正函数系, 其有限个基函数的线性组合不可能表达间断函数. 实际应用中, 不可能采用无限计

算. 那么, 如果要表达间断信息, 只有采用非连续的函数才有可能. 因此, 为了将正交变换理论引入非连续信号处理中, 正交分段多项式函数系(orthogonal piecewise polynomial system, OPPS)便是一种有效的方法.

OPPS 的研究可以追溯到 Haar 函数^[1]和 Walsh 函数^[2], 它们都是零次多项式. 上世纪八十年代初, 齐东旭与冯玉瑜建立了 $L^2[0, 1]$ 上的一类完备 OPPS^[3], 命名为 U-系统. 作为 Walsh 函数向高次推广的结果, U-系统是一类真正意义上的 OPPS, 也是一类预小波(pre-wavelet)^[4]. 此后, 文献^[5, 6]分别构造了与 U-系统几乎等价的 OPPS. 2007 年, 在 U-系统的基础上, 文献^[7]提出了另一类 OPPS, 称之为 V-系统, 它是一类有限区间上的多小波^[8]. U-系统与 V-系统在复杂几何信号处理

中得到广泛的应用^[9-13].

然而,以上这些 OPPS 都建立在区间的均匀剖分基础上. 具体来说,它们的基函数的分段节点都只出现在 $\frac{q}{2^p}$ (p, q 为正整数) 处. 这种具有严格自相似均匀剖分带来的好处是,只需利用压缩与平移算子便可得到整个函数系,具有方便,简洁的优点. 但是,这种具有统一固定内在结构的函数系,并没有考虑实际信号的特殊性. 也就是说,信号的分段点位置往往并不是均匀分布的,此时仍然会产生不理想的结果. 因此,有必要将 OPPS 扩展到非均匀的情形以实现信号的自适应表达.

在本文中,我们提出了一种新的 OPPS 的构造方法. 根据给定的区间 $[0, 1]$ 上的非均匀层次嵌套剖分,首先定义一组线性无关函数组,该函数组中的基为截断单项式. 我们证明了,当对这组截断单项式进行 Gram-Schmidt 正交化后,结果即为对应非均匀节点下的 OPPS,它具有正交性,再生性及收敛性等性质.

2 非均匀层次嵌套剖分

Haar 函数, Walsh 函数, U-系统, V-系统及 Alpert 多小波等 OPPS 均定义在区间 $[0, 1]$ 的自相似均匀剖分节点上. 本文将要构造的非均匀 OPPS, 同样定义在一个具有层次嵌套关系的网格上. 不同的是,各层的剖分位置不再固定为 $\frac{q}{2^p}$. 或者说,原来的均匀节点分布格式只是现在非均匀格式的一种特殊情形. 首先给出非均匀层次嵌套剖分的定义.

定义 1 (非均匀层次嵌套剖分). $X^n = \{x_j^n\}_{j=0}^n, n = 0, 1, 2, \dots$ 为区间 $[0, 1]$ 上的第 n 层非均匀剖分, 满足如下条件:

- (1) $J_n = 2^n$.
- (2) $x_0^n = 0$ 与 $x_{J_n}^n = 1$ 分别为区间 $[0, 1]$ 的首末端点.
- (3) 子区间长度 $x_{j+1}^n - x_j^n$ 由 j 决定.
- (4) $x_j^{n-1} = x_{2j}^n, j = 0, 1, \dots, J_{n-1}$, 体现相邻两层剖分之间的层次嵌套关系

图 1 显示了当 $n = 1, 2, 3, 4$ 时的某一组非均匀层次嵌套剖分.

从定义 1 可知,区间 $[0, 1]$ 非均匀剖分为 2^n 个子区间,第 j 个子区间的长度为 $x_{j+1}^n - x_j^n$,而在原来的均匀格式下,各子区间的长度相等且恒等于 $\frac{1}{2^n}$. 记 P_{k, X^n} 为定义在非均匀剖分 X^n 上的全体 k 次分段多项式集合, $V_n = \overline{\text{span}}\{P_{k, X^n}\}$. 则有 $\dim V_n = 2^n(k+1)$, 并且有 $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n \subset \dots$. 本文的目的便是构造空间 V_n 中的一类具有多分辨率特性的正交分段 k 次多项式函数系.

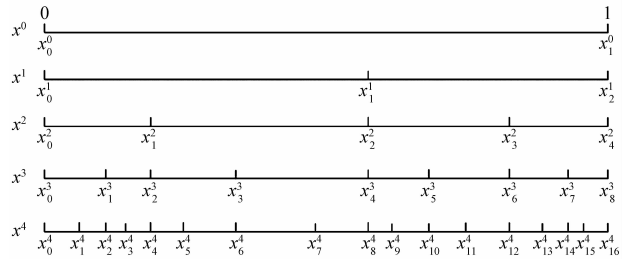


图 1 区间 $[0, 1]$ 上的非均匀层次嵌套剖分示例

3 非均匀 OPPS

3.1 截断单项式及其性质

定义 2 (截断单项式函数系). 当 $n = 0$ 时, 令 $\{W_{k,0}^i(x)\}, i = 1, 2, \dots, k+1$ 为区间 $[0, 1]$ 上的前 $k+1$ 个 Legendre 多项式; 当 $n \geq 1$ 时, 定义

$$W_{k,n}^{i,j}(x) = (x - x_{2j-1}^n)_+^{k+1-i},$$

其中, $n = 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, k+1; j = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$, 并且 $x_{2j-1}^n \in X^n$.

那么,

$$\{W_{k,0}^i(x)\} \cup \{W_{k,n}^{i,j}(x)\}$$

称为 X^n 上的截断单项式函数系.

引理 1 $\{W_{k,0}^i(x)\} \cup \{W_{k,n}^{i,j}(x)\}$ 是区间 $[0, 1]$ 上的线性无关函数组.

证明 只需注意 $\{W_{k,0}^i(x)\}$ 是区间 $[0, 1]$ 上的前 $k+1$ 个 Legendre 单项式, $W_{k,n}^{i,j}(x)$ 是区间 $[0, 1]$ 上的分段多项式, 函数及其导数在区间分段节点的分布即得证.

引理 2 $\{W_{k,0}^i(x)\} \cup \{W_{k,n}^{i,j}(x)\}$ 是 V_n 中的一组基.

证明 由引理 1 及 V_n 的定义即得证.

3.2 非均匀正交分段多项式系的构造

定理 1 对线性无关函数组 $\{W_{k,0}^i(x)\} \cup \{W_{k,n}^{i,j}(x)\}$ 按 Gram-Schmidt 正交化过程得到的标准正交函数系, 即为 X^n 上的非均匀 OPPS.

证明 将线性无关函数中的函数按序排列并记为 $W_1, W_2, \dots, W_j, \dots$, 相应的正交化结果记为 $G_1, G_2, \dots, G_j, \dots$, 而非均匀 OPPS 的基函数为 $V_1, V_2, \dots, V_j, \dots$.

当 $j = 1$ 时, 可具体验证 $G_1 = W_1 = V_1$.

当 $j = 2$ 时, 可具体验证 $G_2 = W_2 = V_2$.

假定 $G_i = V_i$, 对 $j = 1, 2, \dots, m-1 (m \geq 4)$ 成立, 根据 Gram-Schmidt 正交化手续,

$$\hat{G}_j = W_j - \sum_{i=1}^{j-1} [W_j, V_i] V_i,$$

$$G_j = \frac{\hat{G}_j}{\|\hat{G}_j\|} = V_j.$$

我们将证明上述事实对 $j = m$ 时也成立.

根据引理 1 及引理 2, 设 $W_j = \sum_{i=1}^j \alpha_i V_i$, 再根据归纳假设条件有

$$W_m = \alpha V_m + \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i V_i$$

因此,

$$\hat{G}_m = \alpha V_m + \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i V_i$$

而由于

$$[\hat{G}_m, V_i] = [V_m, V_i] = 0, i = 1, 2, \dots, m-1$$

因此

$$\beta_i = 0$$

于是

$$\hat{G}_m = \alpha V_m, \alpha = \|\hat{G}_m\|$$

从而

$$G_m = \frac{\hat{G}_m}{\|\hat{G}_m\|} = V_m$$

3.3 非均匀 OPPS 的性质

本文提出的非均匀 OPSS 具有若干良好的性质, 限于篇幅, 这里不加证明地列出它的性质, 这些性质是对信号进行有效逼近的保障.

(a) 标准正交性: k 次非均匀 OPPS 是 $L^2[0, 1]$ 上的标准正交函数系, 即

$$\int_0^1 V_i(x) V_j(x) dx = \delta_{ij}, i, j = 0, 1, 2, \dots$$

(b) 平方收敛性: 若 $f(x) \in L^2[0, 1]$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n f\|_2 = 0$$

(c) 一致收敛性: 若 $f(x) \in C[0, 1]$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n f\|_{\infty} = 0$$

(d) 再生性: 设 $f(x)$ 是区间 $[0, 1]$ 上的分段 k 次多项式函数, 且分段点位于 $X^n \setminus \{0, 1\}$, 则 $f(x)$ 可以用 X^n 上的 k 次非均匀 OPPS 的有限项基函数线性组合表示, 即

$$f(x) = \sum_{i \in \Lambda} \alpha_i V_i(x)$$

Λ 为有限的指标集.

3.4 分段光滑信号的非均匀 OPPS 逼近算法

设 $f(x)$ 的数学表达式如下:

$$f(x) = \begin{cases} s_1(x), & x \in \Delta_1, \\ s_2(x), & x \in \Delta_2, \\ \dots & \dots \\ s_{2^k}(x), & x \in \Delta_{2^k}. \end{cases}$$

那么, $f(x)$ 的非均匀 OPPS 逼近过程如下:

Step 1 根据定义 1 及定理 1, 构造 X^n 上的 k ($k \geq 1$) 次 OPPS. k 的取值可由 $f(x)$ 的复杂程度与逼近精度决定, k 的取值越大, 逼近精度越高, 一般情况下 k 取 3

或 4 已足够. 此时 OPPS 共有 $2^n(k+1)$ 个基函数, 记为 $V_0(x), V_1(x), \dots, V_{2^n(k+1)-1}(x)$.

Step 2 计算逼近系数 $\alpha_i = \int_0^1 f(x) \cdot V_i(x) dx, i = 0, 1, \dots, 2^n(k+1) - 1$.

Step 3 得到逼近结果 $g(x) = \sum_{i=0}^{2^n(k+1)-1} \alpha_i V_i(x)$, $g(x)$ 是一个分段 k 次多项式.

那么, $g(x)$ 即为分段光滑信号 $f(x)$ 的非均匀 OPPS 逼近结果. 当 $f(x)$ 为 X^n 上的分段 k 次多项式函数, 此时 $g(x)$ 实现了对 $f(x)$ 的精确逼近, 即误差为零.

4 数值实验

4.1 分段光滑信号逼近

例 1 设 $f_1(x)$ 为定义在 $[0, 1]$ 区间上的一个非均匀分段 3 次多项式函数, 表达式如下:

$$f_1(x) = \begin{cases} -106.25x^3 + 30x^2 - 2.25x + 0.25, & 0 \leq x < 0.2; \\ 5.28x^2 - 3.17x + 0.88, & 0.2 \leq x < 0.45; \\ 20.29x^3 - 40.86x^2 + 26.59x - 5.39, & 0.45 \leq x < 0.8; \\ -0.5x + 0.7, & 0.8 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$f_1(x)$ 的图形见图 2(a). 首先, 我们利用光滑型的正交函数系来逼近 $f_1(x)$. 图 2(b), (c) 分别为使用 Fourier 级数前 300 项, DB2 小波前 256 项逼近的结果. 可以看到间断点附近出现明显的震荡, 并且这种波动误差不会随着逼近项数的增加而消失, 即为 Gibbs 现象. 前文已经提到, U-系统, V-系统及 Alpert 多小波是同一个函数空间的不同正交基底. 因此, 在使用相同逼近项数的情况下, 它们对 $f_1(x)$ 的逼近结果是一样的. 这里只选择 U-系统 (3 次) 对 $f_1(x)$ 进行逼近. 图 2(d), (e) 分别为使用 3 次 U-系统前 128 项及 512 项逼近的结果. 可以看出, 虽然它们是正交分段多项式函数系, 由于分段节点均匀分布的限制, 在逼近像 $f_1(x)$ 这类非均匀分段函数时, 效果仍不理想, 特别是在间断点的附近, 误差较大. 利用本文提出的非均匀 OPPS 对 $f_1(x)$ 进行逼近. 根据 3.4 节中介绍的逼近算法, 第一步, 构造相应的非均匀 OPPS 基函数 ($k=3$), 记为 $V_i(x), i=0, 1, \dots, 15$; 第二步, 计算逼近系数 $\alpha_i = \int_0^1 f_1(x) V_i(x) dx, i=0, 1, \dots, 15$, 结果如下:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0.2248, & \alpha_1 &= -0.0065, & \alpha_2 &= 0.0002, & \alpha_3 &= 0.0167, \\ \alpha_4 &= -0.0005, & \alpha_5 &= 0.0051, & \alpha_6 &= -0.0005, & \alpha_7 &= -0.0012, \\ \alpha_8 &= -0.0112, & \alpha_9 &= -0.0072, & \alpha_{10} &= -0.0002, & \alpha_{11} &= 0.0166, \\ \alpha_{12} &= -0.0238, & \alpha_{13} &= -0.0192, & \alpha_{14} &= 0.0058, & \alpha_{15} &= 0.0160. \end{aligned}$$

第三步, 得到逼近结果:

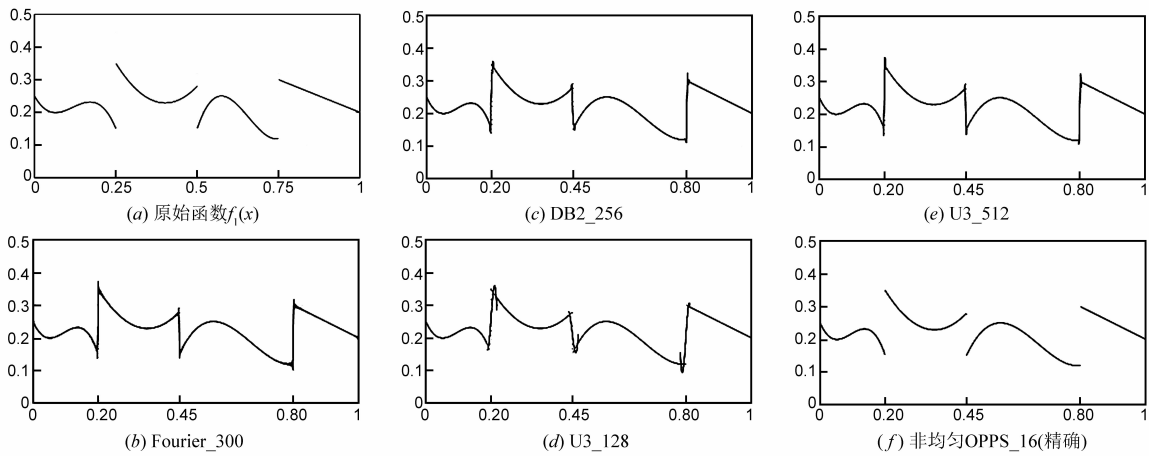


图2 非均匀分段多项式的逼近

$$g_1(x) = \sum_{i=0}^{15} \alpha_i V_i(x) = \begin{cases} -106.25x^3 + 30x^2 - 2.25x + 0.25, & 0 \leq x < 0.2; \\ 5.28x^2 - 3.17x + 0.88, & 0.2 \leq x < 0.45; \\ 20.29x^3 - 40.86x^2 + 26.59x - 5.39, & 0.45 \leq x < 0.8; \\ -0.5x + 0.7, & 0.8 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

可以看出, $g_1(x)$ 是对 $f_1(x)$ 的精确重构, 如图 2(f) 所示, 该结果也验证了再生性.

例 2 设 $f_2(x)$ 为定义在区间 $[0, 1]$ 上的一个非均匀分段光滑函数, 表达式如下:

$$f_2(x) = \begin{cases} -\frac{1}{5} \sin 12x + 0.12, & 0 \leq x < 0.18; \\ -\frac{3}{10} 10^x + 0.6, & 0.18 \leq x < 0.40; \\ \frac{3}{20} \cos(5 - 10x), & 0.40 \leq x < 0.82; \\ \frac{1}{5} \sqrt{x} - 0.2, & 0.82 \leq x < 1. \end{cases}$$

$f_2(x)$ 的图像见图 3(a). 为了定量计算逼近误差, 用 1024 个采样点统计近似误差, 即

$$E_r = \sum_{i=1}^{1024} (f_2(x_i) - S_n(f_2)(x_i))^2$$

其中, $S_n(f_2)$ 表示前 n 项逼近的结果. 使用 Fourier, DB2 小波与 3 次 U-系统进行逼近的结果及误差见图 3(b) ~ (e). 最后, 我们用 3 次非均匀 OPPS 逼近 $f_2(x)$. 计算过程与例 1 一样, 此不累述. 这里只列出逼近系数 $\alpha_i, i=0, 1, \dots, 15$ 及逼近结果 $g_2(x)$ 的数学表达式. 图 3(f) 显示了逼近结果图像及误差. 可以看出, 利用本文提出的非均匀 OPPS 逼近算法, 逼近效果有了较大的提高.

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0.0077, & \alpha_1 &= -0.0167, & \alpha_2 &= -0.0216, & \alpha_3 &= 0.0102, \\ \alpha_4 &= 0.0403, & \alpha_5 &= -0.0277, & \alpha_6 &= 0.0233, & \alpha_7 &= 0.0438, \\ \alpha_8 &= 0.0158, & \alpha_9 &= -0.0189, & \alpha_{10} &= -0.0073, & \alpha_{11} &= 0.0149, \\ \alpha_{12} &= -0.0273, & \alpha_{13} &= -0.0100, & \alpha_{14} &= 0.0087, & \alpha_{15} &= 0.0121. \end{aligned}$$

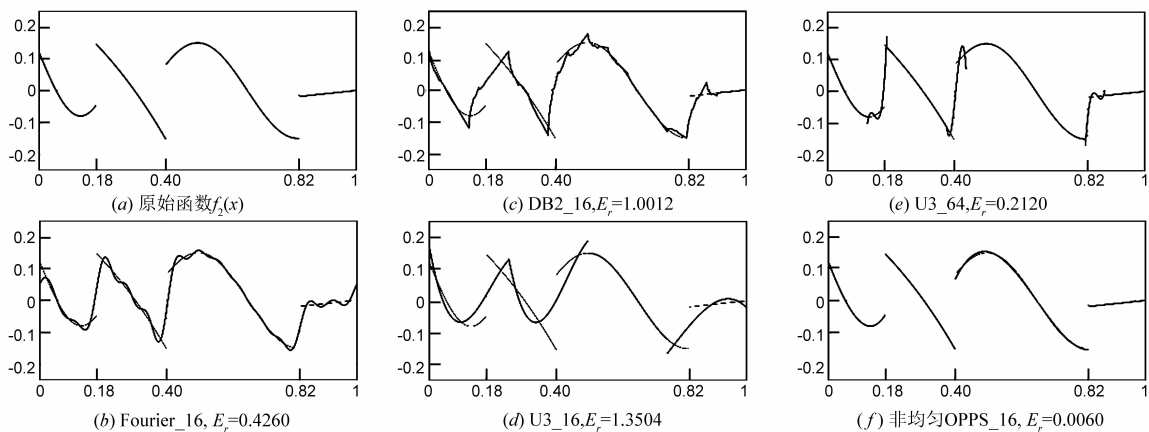


图3 非均匀分段光滑函数的逼近

$$g_2(x) = \sum_0^{15} \alpha_i V_i(x) = \begin{cases} 25.44x^3 + 4.81x^2 - 2.61x + 0.12, & 0 \leq x < 0.18; \\ -1.19x^3 - 0.52x^2 - 0.74x + 0.30, & 0.18 \leq x < 0.40; \\ 17.34x^3 - 34.18x^2 + 21.06x - 4.00, & 0.40 \leq x < 0.82; \\ 0.02x^3 - 0.07x^2 + 0.20x - 0.14, & 0.82 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

5 结论

现有的正交分段多项式函数系(OPPS)定义在有限区间上的均匀剖分节点上,这种固定的内在结构决定了它们在表达非均匀分段信号时的结果是不理想的.本文提出了一种非均匀 OPPS 的构造方法,它能根据给定的非均匀层次嵌套剖分,自动高效地得到相应的非均匀 OPPS.该函数系具有正交性,完备性,再生性及收敛性.数值实验表明,本文方法比传统正交函数系在分段光滑信号逼近中具有更好的结果.

参考文献

- [1] Harr A. Zur theorei der orthogonalen funktionen systeme [J]. *Mathematische Annalen*, 1910, 69(3): 331 - 371.
- [2] Walsh J L. A closed of normal orthogonal functions [J]. *American Journal of Mathematics*, 1923, 45(1): 5 - 24.
- [3] Feng Y Y, Qi D X. A sequence of piecewise orthogonal polynomials [J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1984, 15(4): 834 - 844.
- [4] Micchelli C, Xu Y S. Using the matrix refinement equation for the construction of wavelets on invariant sets [J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1994, 1(4): 191 - 401.
- [5] Alpert B K. A class of bases in L^2 for the spares representation of integral operators [J]. *SIMA Journal on Mathematical Analysis*, 1993, 24(1): 246 - 262.
- [6] Beam R M, Warming R F. Multiresolution analysis and supercompact multiwavelets [J]. *SIMA Journal on Scientific Computing*, 2002, 22(4): 1238 - 1268.
- [7] Song R X, Ma H, Wang T J, et al. Complete orthogonal V-system and its applications [J]. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2007, 6(3): 853 - 971.
- [8] Huang C, Yang L H, Qi D X. A new class of multi-wavelet bases: V-system [J]. *Acta Mathematica Sinica*, 2012, 28(1): 105 - 120.
- [9] 齐东旭,陶尘钧,宋瑞霞,等.基于正交完备 U-系统的参数曲线图组表达 [J]. *计算机学报*, 2006, 29(5): 778 - 785.
Qi D X, Tao C J, Song R X, et al. Representation for a group of parametric curves based on the orthogonal complete U-System [J]. *Chinese Journal of Computers*, 2006, 29(5): 778 - 485. (in Chinese)
- [10] 蔡占川,孙伟,齐东旭.基于正交完备 U-系统的图形分类与识别方法 [J]. *软件学报*, 2006, 17(Supplement): 21 - 27.
Cai Z C, Sun W, Qi D X. A Classification and recognition method for planar figures based on complete orthogonal U-System [J]. *Journal of Software*, 2006, 17(Supplement): 21 - 27. (in Chinese)
- [11] 熊刚强,齐东旭,郭芬红.一类完备的正交分段多项式函数系及其应用 [J]. *中国科学:信息科学*, 2012, 42(1): 70 - 82.
Xiong G Q, Qi D X, Guo F H. A class of orthonormal complete piecewise polynomial systems and applications thereof [J]. *Scientia Sinica Informationis*, 2012, 42(1): 70 - 82. (in Chinese)
- [12] Song R X, Zhao Z X, Wang X C. An application of the V-system to the clustering of cherno faces [J]. *Computers and Graphics*, 2010, 34(5): 529 - 536.
- [13] Song R X, Yao D X, Wang X C, et al. Retrieval method for 3D object group based on V-system [J]. *Journal of Advanced Mechanical Design, System and Manufacturing*, 2012, 6(3): 340 - 353.

作者简介



陈伟男, 1986年1月出生于江苏省宝应县. 2013年获得澳门科技大学理学博士学位, 现为江南大学数字媒体学院讲师, 主要研究兴趣为小波分析和计算机图形学.
E-mail: wchen_jdsm@163.com